古典坐标几何学

讲师: 廖侠

Email: xliao@hqu.edu.cn

个人主页: https://hirzebruch.github.io/main.html

上课时间: 周一3-4, 周四 7-8

答疑时间：周二下午2：00-4：00，学院2层公共空间

群的例子1

考虑以下集合：

1. $\mathbb{Z}$：所有的整数构成的集合。
2. $\mathbb{R}_+$：所有的正实数构成的集合。
3. $\mathbb{R}^*$：所有非零实数构成的集合。
4. $\mathbb{R}$：所有的实数构成的集合。
5. $\{1,-1\}$：所有的绝对值等于1的实数构成的集合。
6. $GL(2,\mathbb{R})$：所有2×2阶可逆的实矩阵构成的集合。
7. $GL(n,\mathbb{R})$：所有n×n阶可逆的实矩阵构成的集合。

我们可以归纳出以上集合的3点共性。如果把上述集合之中的任一个叫做G，则G满足下面的性质1-3：

群的性质/定义

定义：给出一个集合G以及G上的一个映射$m: G\times G \to G$，如果集合G和这个映射满足下面3点性质，则称G与这个映射m构成了一个群。很多时候，我们会简单地说，G是一个群。

1. 存在一个满足结合律的映射$m: G\times G \to G$。即如果$a, b, c \in G$，则$m(m(a,b),c) = m(a,(b,c))$。例如，对于$\mathbb{Z}$，m为加法映射；对于$\mathbb{R}_+$，m为乘法映射。
2. 存在一个元素$e \in G$，使得$m(e,a) = m(a,e) = a, \forall a \in G$。例如，对于$\mathbb{Z}$，$e = 0$；对于$\mathbb{R}_+$，$e = 1$。
3. 对于$\forall a \in G$，$\exists b \in G$，使得$m(a,b) = m(b,a) = e$。这个b叫做a的逆元。

在不会产生歧义时，我们可以把$m(a,b)$简写为ab，或者$a \cdot b$。

练习：在上一页的6种情况下，具体理解性质1-3的含义。

朴素的表述

1. 封閉性：對于所有G中a, b，運算$a \cdot b$的結果也在G中。b[›]
2. 結合律：對于所有G中的a, b和c，等式 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$成立。
3. 單位元：存在G中的一個元素e，使得對于所有G中的元素a，总有等式 $e \cdot a = a \cdot e = a$ 成立。
4. 逆元：對于每個G中的a，存在G中的一個元素b使得总有$a \cdot b = b \cdot a = e$，此处$e$为單位元。

群的例子2

准确理解以下集合上的群结构：

1. $\mathbb{C}$：所有复数构成的集合。
2. $\mathbb{C}^*$：所有非零复数构成的集合。
3. S^1：所有范数等于1的复数构成的集合。这一集合对应于复平面上的单位圆（即一维球面）。S是英语单词surface的缩写。

4. $\mathbb{H}$：所有的四元数构成的集合。
5. $\mathbb{H}^*$：所有的非零四元数构成的集合。
6. S^3：所有的范数等于1的四元数构成的集合。这一集合对应于$\mathbb{R}^4$上的三维球面。
7. $\mathbb{R}^n$：所有的n维向量构成的集合。

群的例子3

考虑集合$\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$。

1. 如何设计映射$\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\times\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\to\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$，使得$\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$关于这个映射成为一个群。
2. 是否可以按照朴素的方式

$$\left(\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}\right)\mapsto\begin{bmatrix}a_1b_1\\a_2b_2\end{bmatrix}$$

定义映射$\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\times\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\to\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$？

3. 如果希望利用上面的方式定义映射的话，我们需要如何修正集合$\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$？

集合到自身的映射

M为任意一个集合。

$f: M \to M$为一个M到自身的映射。

如果f是双射（单射+满射），我们可以说，f是一个M到自身的一一映射。

练习：

1. 给出一个$\mathbb{Z}$到自身的一一映射的例子。
2. 找出一个映射$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$，要求$f$不是$\mathbb{Z}$到自身的一一映射。
3. 找出一个映射$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，要求$f$不是$\mathbb{R}$到自身的一一映射。

群的例子4

固定一个集合M，我们把所有的M到自身的一一映射放在一起，构成一个集合。这个集合我们记为$Aut_{\mathbf{Set}}(M)$。在影印的抽象代数教材中，这一集合被记为$S(M)$。

如果f,g均为M到自身的一一映射，那么显然$g\circ f$也是一个M到自身的一一映射。因此我们可以通过映射的复合定义：

$$m: Aut_{\mathbf{Set}}(M)\times Aut_{\mathbf{Set}}(M) \to Aut_{\mathbf{Set}}(M)$$

$$(f,g) \mapsto g\circ f$$

或者简单记为$fg = m(f,g) = g\circ f$

练习：证明$Aut_{\mathbf{Set}}(M)$与映射m构成了一个群。

步骤：1，验证结合律；2，描述映射m的单位元；3，描述$f \in Aut_{\mathbf{Set}}(M)$的逆元。

群的例子5

依旧考虑集合$Aut_{\mathbf{Set}}(M)$，我们在$Aut_{\mathbf{Set}}(M)$上定义另一个运算：

$$m': Aut_{\mathbf{Set}}(M)\times Aut_{\mathbf{Set}}(M) \to Aut_{\mathbf{Set}}(M)$$
$$(f,g) \mapsto f \circ g$$

或者简单记为$fg = m'(f,g) = f \circ g$

利用上一页的推理过程，容易说明$Aut_{\mathbf{Set}}(M)$与映射m'也构成一个群。

我们看到了，对于同一个集合（这里是$Aut_{\mathbf{Set}}(M)$），可以按照不同的方式定义运算。这些不同的运算定义了不同的群结构。

练习：当$M = \mathbb{R}$时，举例说明m与m'在$Aut_{\mathbf{Set}}(\mathbb{R})$上定义了不同的运算。（$f(x) = x + 1, g(x) = 2x$，则$m(f,g)$是什么函数？$m'(f,g)$是什么函数？）

群的例子6

取定一个集合M以及M的一个子集A。我们可以考虑所有把M与A同时映射到自身的一一映射。

用数学符号描述，即$f \in Aut_{\mathbf{Set}}(M)$且$f(A) = A$

这样的映射构成的集合，我们记为$Aut_{\mathbf{Set}}(M, A)$。证明$Aut_{\mathbf{Set}}(M, A)$与第8页ppt的映射m（或者第9页ppt的映射m'）构成一个群。

练习：令$M = \mathbb{R}^2$，令A为$\mathbb{R}^2$中的单位圆环S^1。找出一个具体的在$Aut_{\mathbf{Set}}(\mathbb{R}^2, S^1)$中的映射的例子。再找出一个在$Aut_{\mathbf{Set}}(\mathbb{R}^2)$中但是不在$Aut_{\mathbf{Set}}(\mathbb{R}^2, S^1)$中的映射的例子。

群的例子7

很多情况下，集合M上还具备某些其它的结构，所以我们需要研究所有保持这种结构不变的M到自身的一一映射构成的集合。

考虑$M = \mathbb{R}^n$。这时M不光是一个集合，它还同时是一个线性空间（在$\mathbb{R}^n$ 上可以定义向量的加法和数乘，并且加法与数乘满足结合律，分配律……）。所以我们可以考虑所有保持线性空间结构的一一映射。用符号表示，我们考虑所有满足以下两个条件的映射：

1. $T \in Aut_{\mathbf{Set}}(\mathbb{R}^n)$
2. $T(c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$

这个群为$\mathbb{R}^n$上所有的可逆线性映射构成的群。我们在之前的课程中学习过，$\mathbb{R}^n$上任何一个可逆的线性变换唯一对应于一个可逆矩阵。因此这个群与n阶可逆矩阵构成的群是一一对应的。在今后的课程中，我们会学到，这两个群之前存在一个自然的**同构**。

群的例子8

考虑集合$M = \mathbb{R}$。

$\mathbb{R}$不仅是一个集合，它上面还有一个自然的拓扑结构（在今后的课程中会学到）。我们可以考虑所有保持这个拓扑结构不变的$\mathbb{R}$到自身的一一映射构成的集合，记为$Homeo(\mathbb{R})$。用朴素的语言描述，这个集合中的元素f满足以下两个条件：

1. $f \in Aut_{\mathbf{Set}}(\mathbb{R})$
2. f为连续函数。

练习：证明$Homeo(\mathbb{R})$与映射的复合m'（ppt第5页）构成一个群。

实际上$Homeo(\mathbb{R})$与映射的复合m（ppt第4页）也构成一个群，但是几何学中通常考虑复合m'给出的群结构。

群的例子9

考虑集合$M = \mathbb{R}$。

考虑满足以下三个条件的所有函数：

1. $f \in Aut_{\mathbf{Set}}(\mathbb{R})$
2. f为无穷阶可微分函数。
3. $f' = \frac{df}{dx}$在$\mathbb{R}$上任意一点都不为零。

这样的函数构成的集合记为$Diff(\mathbb{R})$。

练习：证明$Diff(\mathbb{R})$与映射的复合m'构成一个群。

1. 如果$f, g \in Diff(\mathbb{R})$，我们需要验证$f \circ g \in Diff(\mathbb{R})$。也就是说，我们需要证明
    1. $f \circ g$也是无穷阶可微分
    2. $(f \circ g)' = \frac{d(f \circ g)}{dx}$在$\mathbb{R}$上任意一点的取值都不等于零。
2. 我们需要验证$Diff(\mathbb{R})$包含单位元。也就是说，要验证恒同映射$f(x) = x$在这个集合中。这包含两点：
    1. $f(x) = x$无穷阶可微分
    2. $f(x) = x$的导数在$\mathbb{R}$上任意一点的取值都不等于零。
3. 如果$f \in Diff(\mathbb{R})$，令h为f的反函数。我们要验证$h \in Diff(\mathbb{R})$。也就是说，我们需要证明
    1. h无穷阶可微分
    2. $h' = \frac{dh}{dt}$在$\mathbb{R}$上任意一点的取值都不等于零。

群的例子10

二面体群（dihedral groups）

在$\mathbb{R}^2$中放置一个实心正方型 X。我们可以假定正方形的中心就落在$\mathbb{R}^2$的原点上。考虑满足下列条件的所有映射$T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

1. $T \in Aut_{\mathbf{Set}}(\mathbb{R}^2)$
2. 映射 T不改变$\mathbb{R}^2$中任意两点的距离。用数学符号表示就是：对于任意$x, y \in \mathbb{R}^2$，我们都有$d\big(T(x), T(y)\big) = d(x, y)$，其中$d(-,-)$表示两点间距离。
3. $T(X) = X$。正方型被T映射到自身。

所有满足这些条件的映射构成一个群：D_4

备注：满足条件1，2的映射被称为$\mathbb{R}^2$上的刚体运动。所有的刚体运动也构成一个群。

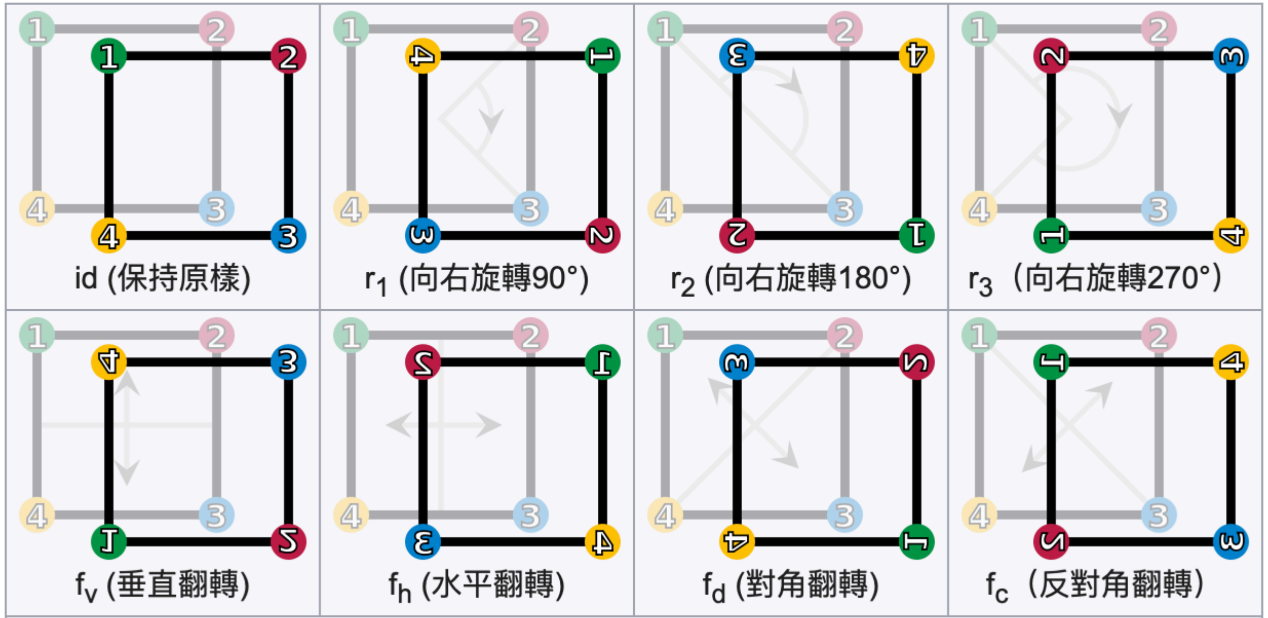
二面体群（dihedral groups）

容易看出，$\mathbb{R}^2$的恒同映射，绕原点$\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$的旋转都属于这个群$D_4$。除此以外，沿着对角线的翻转，沿着边的垂线方向的翻转也都属于这个群。

通过进一步的观察可以看出，D_4中的全部元素就是我们上面描述的这些映射。

二面体群（dihedral groups）

正方形的对称操作（比如旋轉和反射）形成了一個群，叫做二面體群，并记為D_4。[5]二面体群中有下列8个對稱：



正方形對稱群（D_4）的元素。对頂點进行著色和編號只是把這些運算形象化。

- 恒等運算保持所有東西不變，记為id；
- 把正方形向右（順時針）旋轉90˚、180˚和270˚，分別记為r_1、r_2和r_3。
- 關于垂直和水平中線的反射记為f_v和f_h，關于兩個對角線的反射记為f_d和f_c。

二面体群（dihedral groups）

用数字1,2,3,4标记正方型的顶点，我们可以用1,2,3,4在变换后的落点来描述(D_4, m)中的元素。

例如，前面图中的映射r_3（右旋$\frac{3\pi}{2}$）可以被表示为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

映射f_h可以被表示为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}，或者\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

群中元素的乘积$r_3 \cdot f_h$被定义为映射的复合$f_h \circ r_3$（这里我们用m复合，有些教材用m'复合。大家在阅读书籍时，要首先弄清作者的记号选取标准。）我们可以把两个矩阵上下摆在一起来计算复合的结果：

二面体群（dihedral groups）

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\4 & 1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

所以结果用矩阵表示，就是

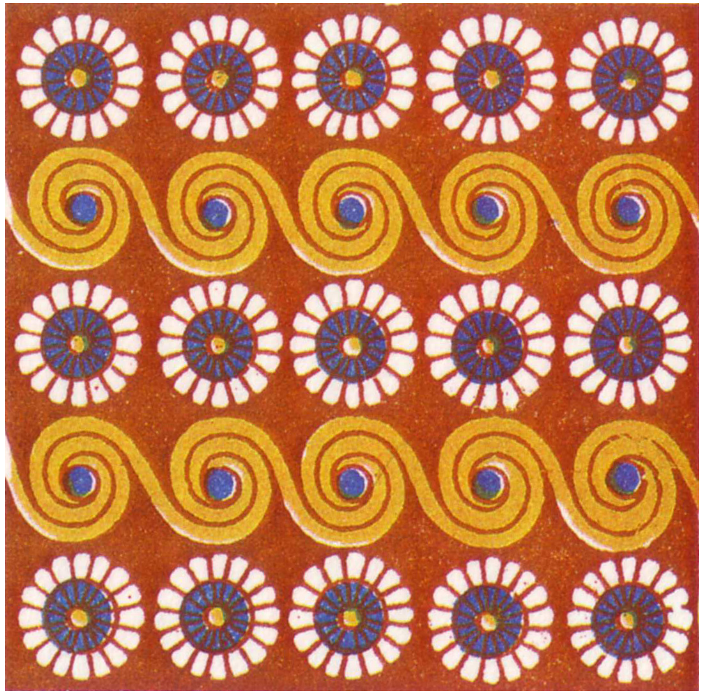
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\3 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

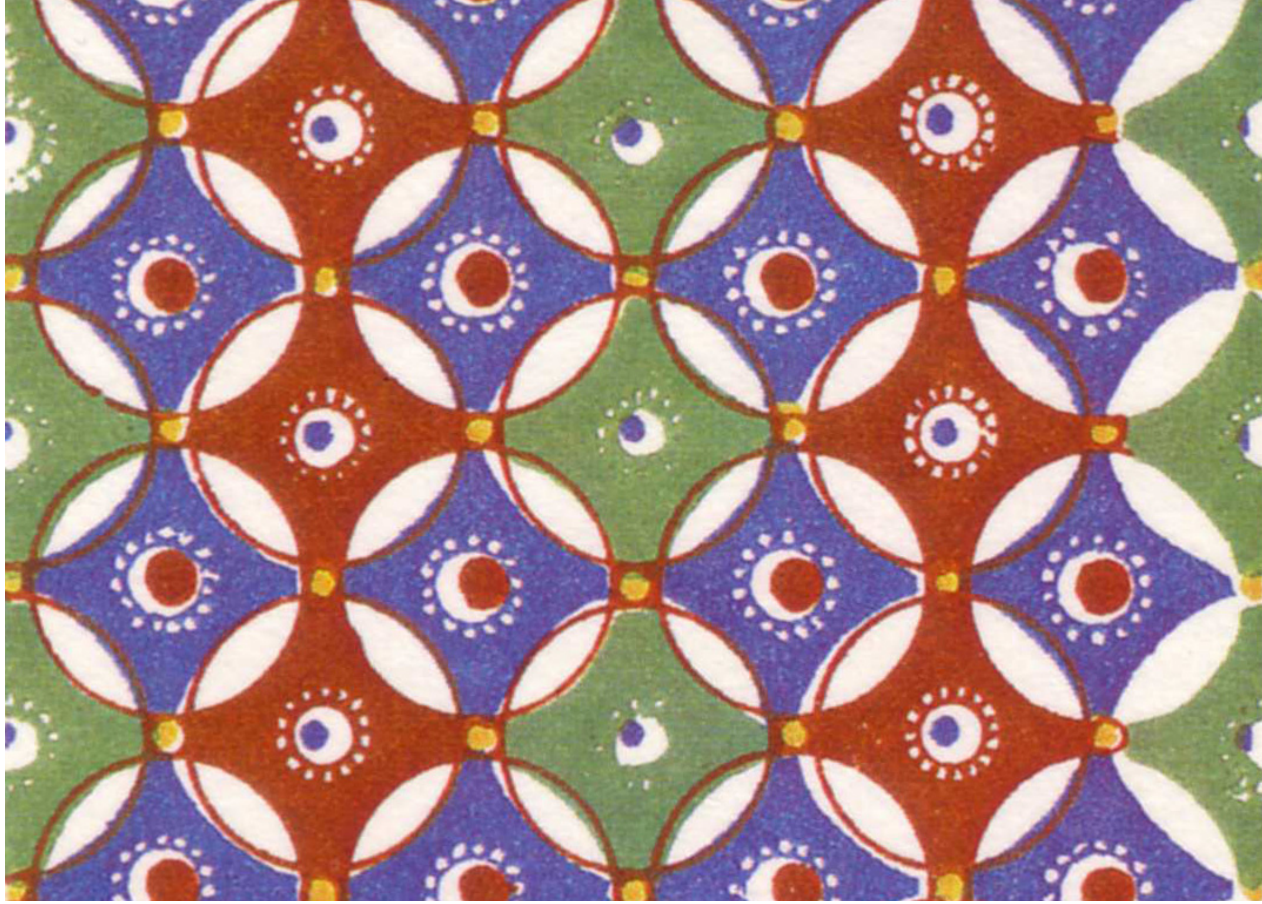
我们看到，这个映射只交换1，3而保持2，4不动。即对角翻转f_d。

练习：

1. 用矩阵计算$f_c \cdot r_2$
2. 令$M = \{1,2,3,4\}$。在代数学中，通常把$Aut_{\mathbf{Set}}(M)$记为S_4。计算S_4中元素的个数。比较S_4与D_4的差别。

埃及古墓的天花板花纹





印度金属制品上的花纹（左）
卢浮宫收藏的木乃伊棺材上的花纹（右）

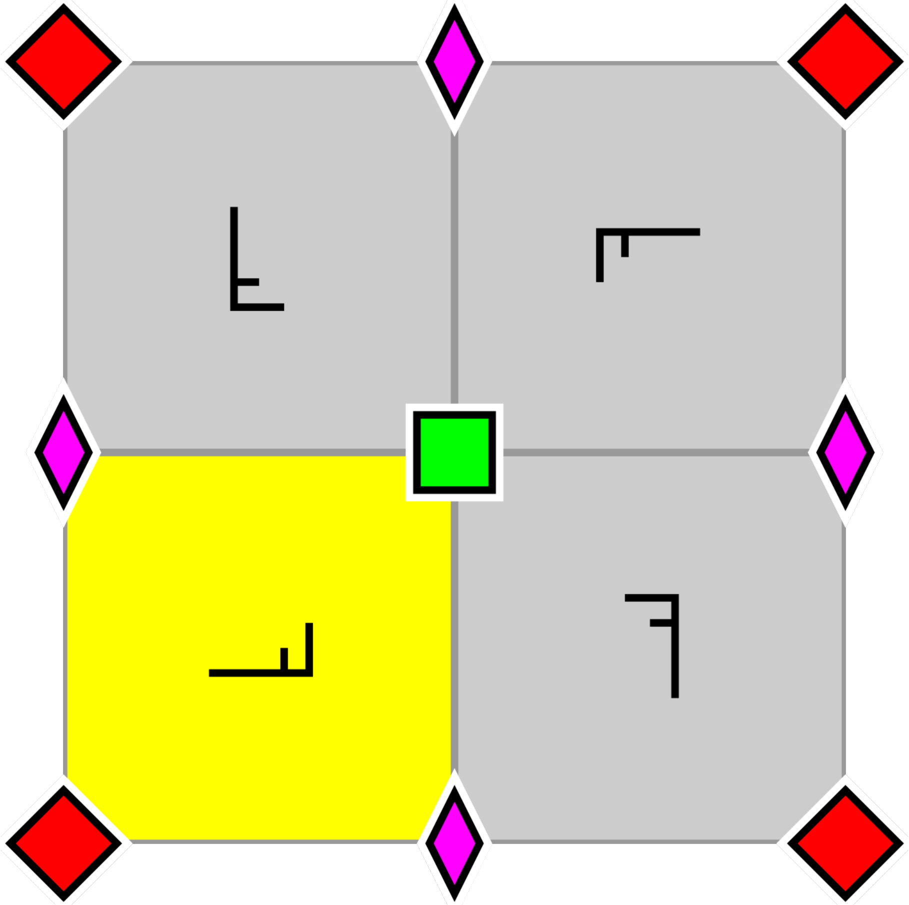
壁画群(wallpaper group)

首先固定一个$\mathbb{R}^2$上向四周无限延展的花纹图样，考虑满足下列条件的所有映射$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

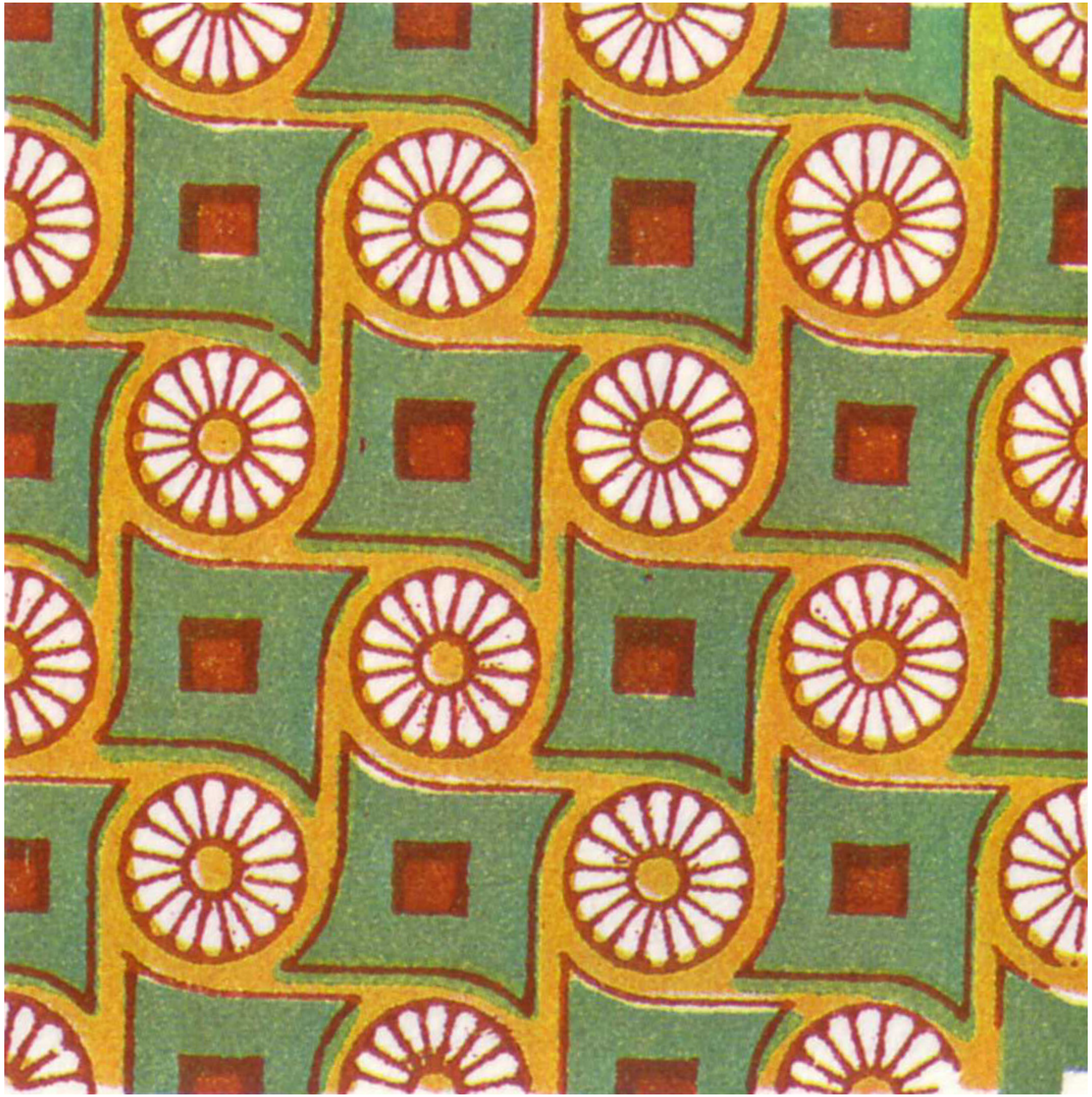
1. $T \in Aut_{\mathbf{Set}}(\mathbb{R}^2)$
2. 映射 T不改变$\mathbb{R}^2$中任意两点的距离。
3. 映射T使花纹看上去保持原状。

显然，沿着壁画延伸方向的平移满足条件，但是可能还存在其它的映射。

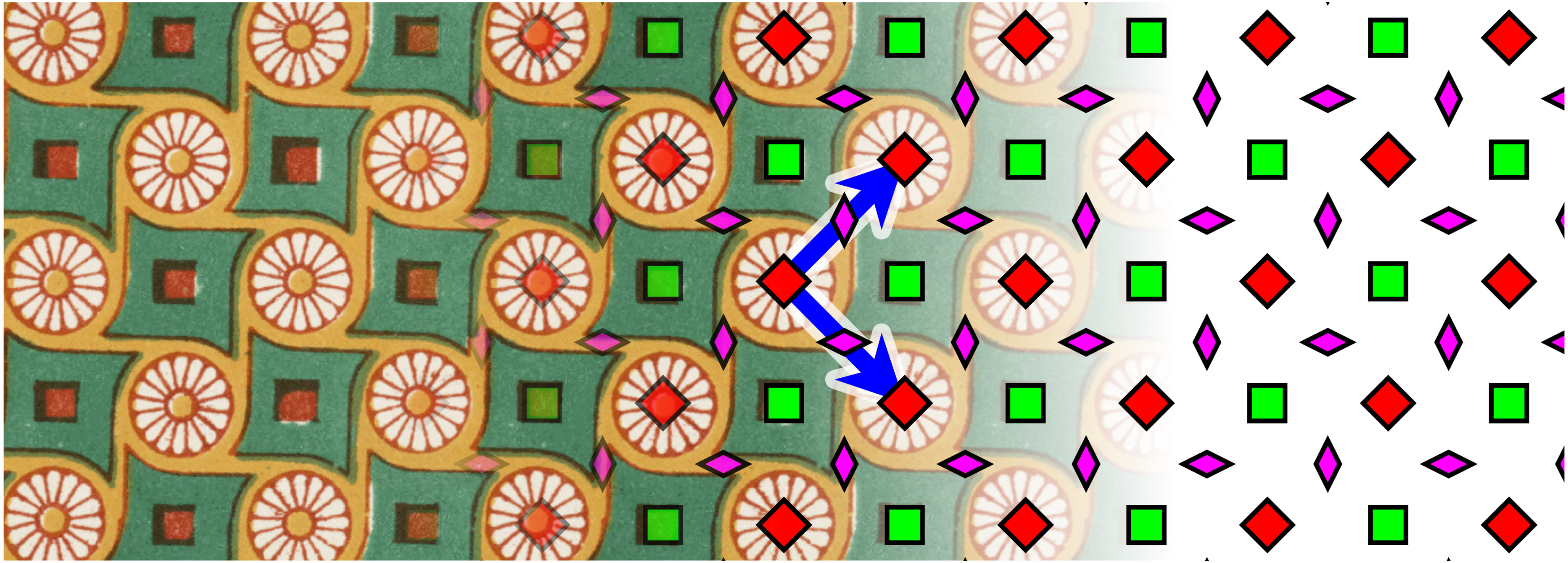
Group p4(442)



古墓的天花板是p4群的一个例子（需忽略颜色）



Group p4(442)



壁画群（也称为壁画的对称群）的分类

1. 壁画群刻画了壁画的对称性。
   外观上十分不同的壁画可能拥有相同的壁画群,
   也就是说它们具有本质上完全相同的对称性。
2. 壁画群的分类在1891年由Evgraf Fedorov首次给出。
   壁画群可以分为本质不同的17大类。

伊斯兰花纹

Shah Nematollah Vali Shrine （伊朗境内）

双曲伊斯兰花纹对称群

把欧几里得平面上的伊斯兰花纹绘制在庞加莱圆内，
我们也可以研究相应的双曲伊斯兰花纹的对称群。

在欧式平面上，我们所考虑的映射都是刚体运动，
也就是保持任意两点间距离的映射。这种映射又称保长映射。

在庞加莱圆内，我们则需要考虑保持双曲长度的映射。
在复变函数的课程中会学到，这些映射都是共形映射。

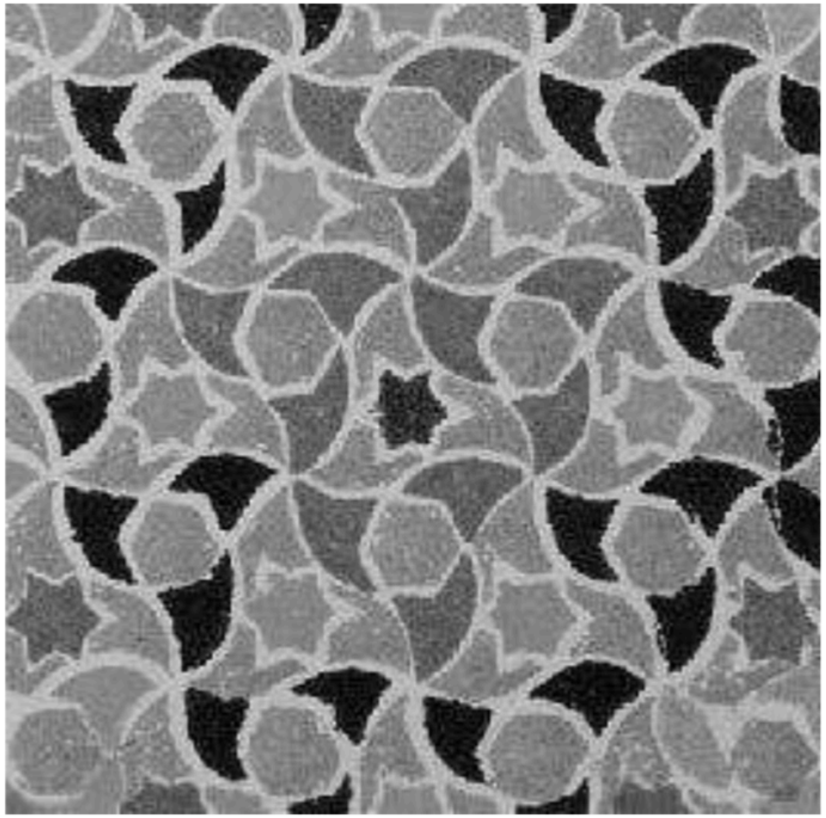


Figure 11: A pattern from the Alhambra with symmetry group $p3$ (= (3,3,3)).

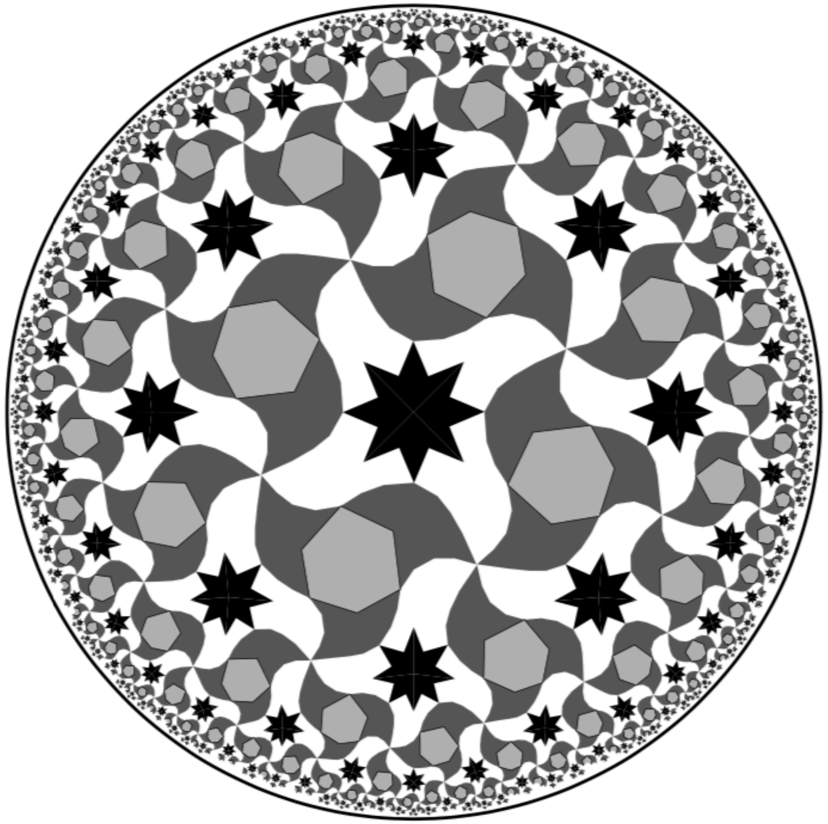


Figure 12: A hyperbolic pattern based on the pattern of Figure 11, with symmetry group (3,3,4).

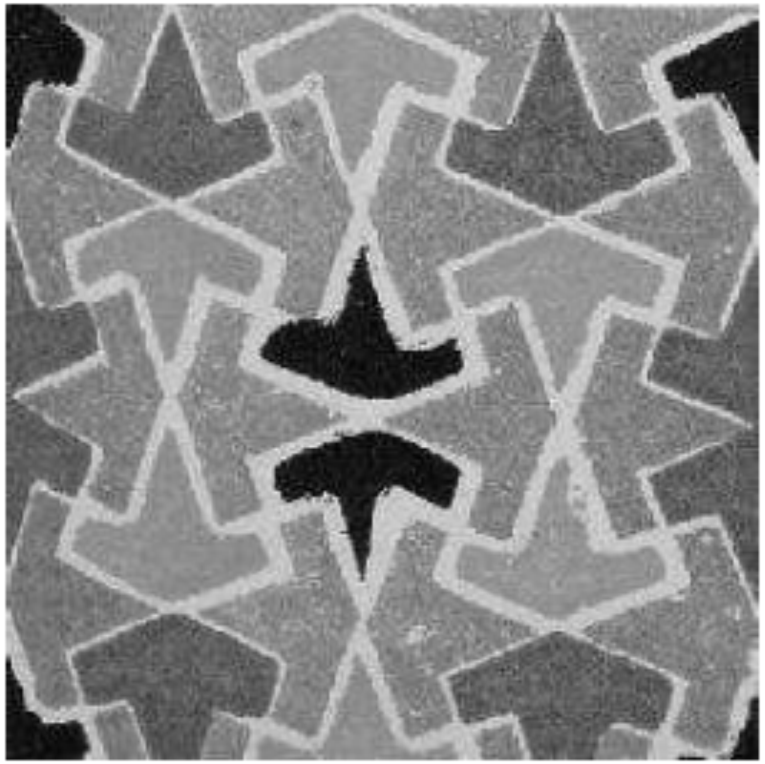


Figure 1: An Islamic pattern from the Alhambra.

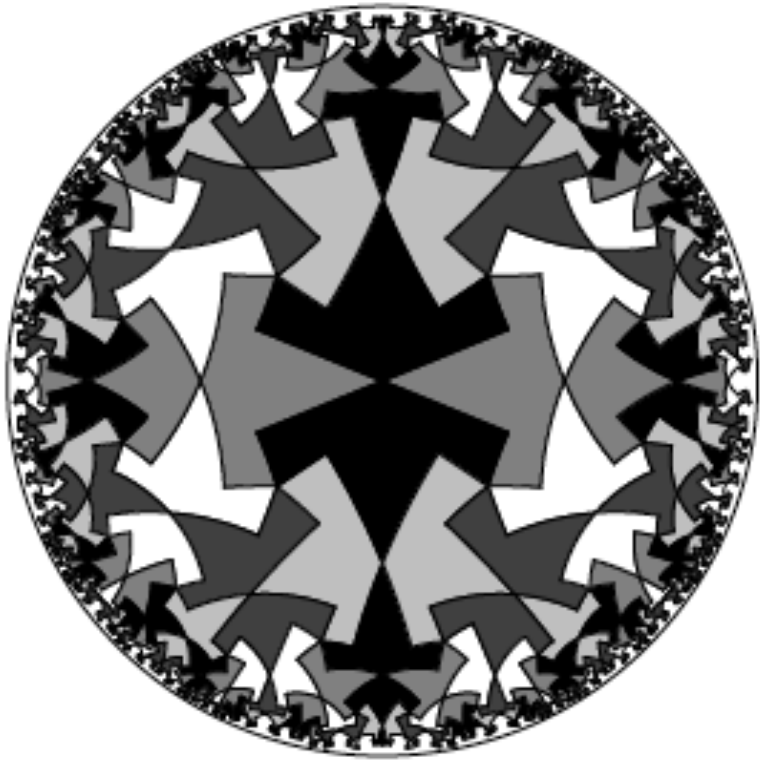


Figure 2: An Islamic hyperbolic pattern based on the Euclidean pattern of Figure 1.

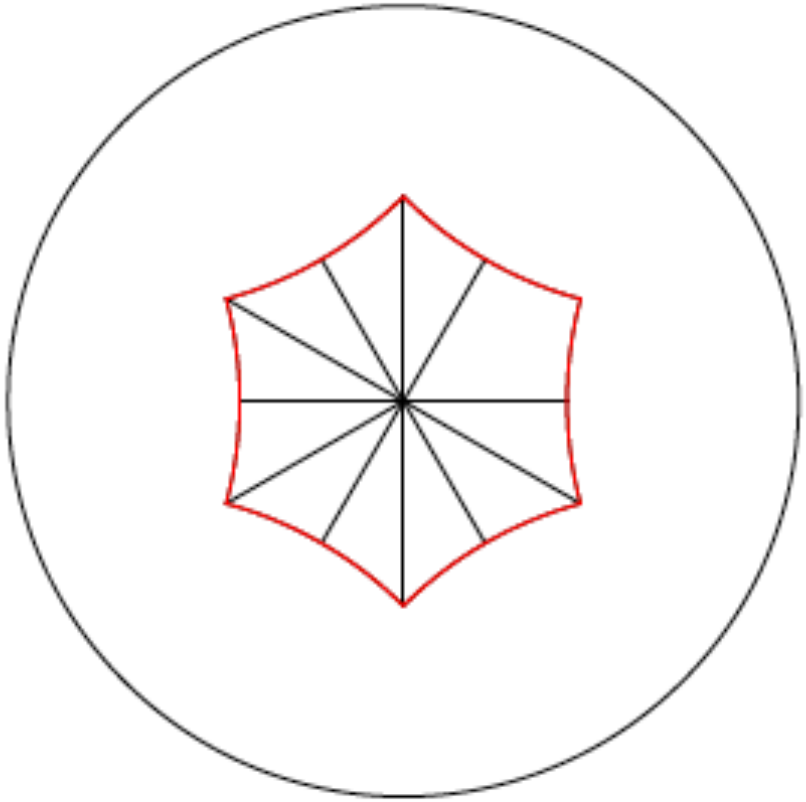


Figure 5: An Islamic pattern with symmetry group $p6m$ (= $[6, 3]$).

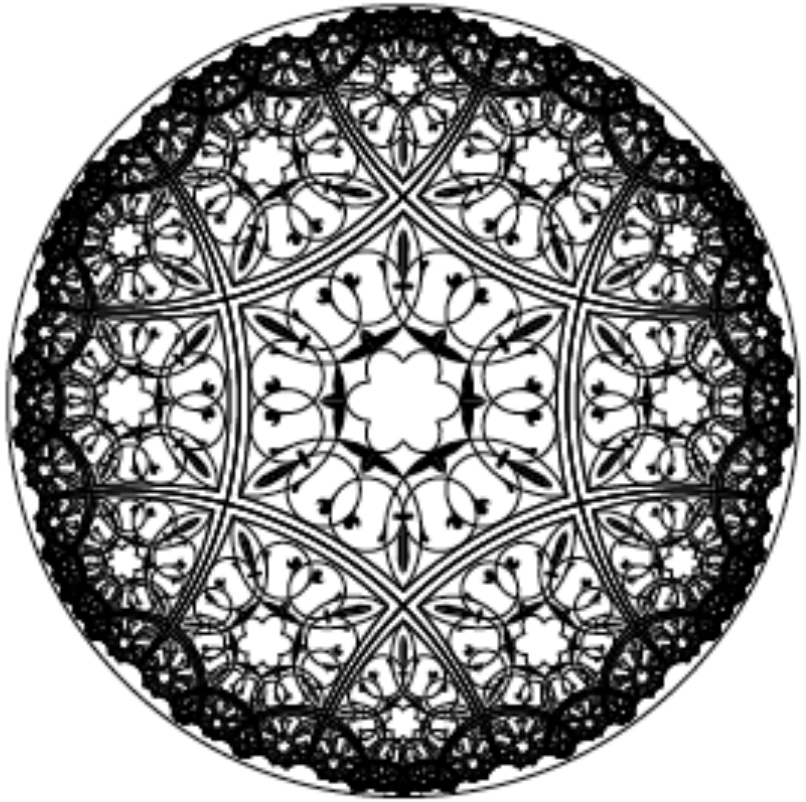


Figure 6: An Islamic hyperbolic pattern with symmetry group $[6, 4]$ that is based on the Euclidean pattern of Figure 5.

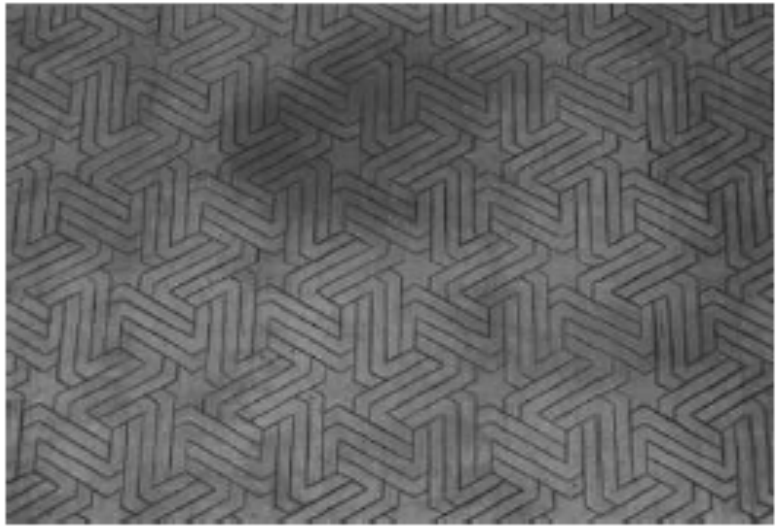


Figure 7: A pattern from the Alhambra with symmetry group $p6$ (= $[6,3]^+$).

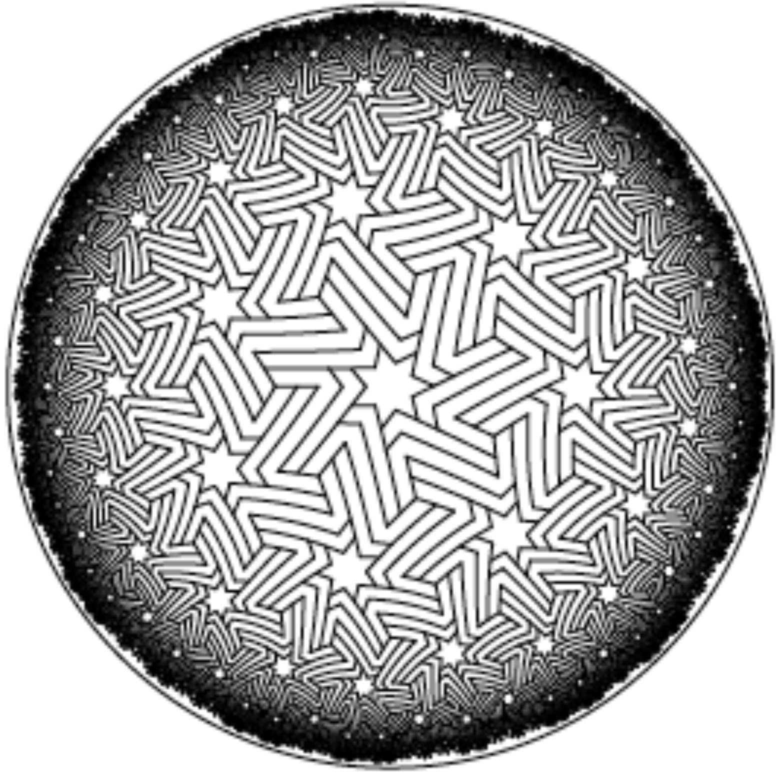


Figure 8: A hyperbolic pattern based on the pattern of Figure 7, with symmetry group $[7,3]^+$.

群在集合上的作用

令G为一个群，M为一个集合。群G在集合M上的左作用是指一个满足以下两个条件的映射$l: G\times M \to M$。

1. 左结合率　　$l(g_1g_2, x) = l\big(g_1, l(g_2, x)\big)$ 对任意$g_1, g_2 \in G, x \in M$成立

2. G的单位元保持M不动　　$l(e, x) = x$ 对任意$x \in M$成立

类似地，我们还可以定义群G在集合M上的右作用。这是指满足下面条件的映射$r: M\times G \to M$

1. 右结合率　　$r(x, g_1g_2) = r(r(x, g_1), g_2)$

2. G的单位元保持M不动　　$r(x, e) = x$ 对任意$x \in M$成立

在不会出现理解偏差时，我们常常用记号$g \cdot x$代替$l(g, x)$，用记号$x \cdot g$代替$r(x, g)$。

作用的例子1

$$GL(2,R)\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) \mapsto \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}$$

在这个例子中，上面的作用满足结合率是指，
对于任意的2阶可逆矩阵A, B，以及任意的$x \in \mathbb{R}^2$，都有
$$(AB)x = A(Bx)$$

类似的例子还有 $GL(n,R)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

作用的例子2

令M为一个集合。群$(Aut_{\mathbf{Set}}(M), m')$在 M上有一个自然的左作用：

$$Aut_{\mathbf{Set}}(M) \times M \to M$$
$$(f, x) \mapsto f(x)$$

这个映射满足结合率是因为，对于$\forall f, g \in Aut_{\mathbf{Set}}(M)$以及$\forall x \in M$，都有以下等式：

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

作用的例子3

我们在课程中研究的情形大都是上面两个例子的某种改动。

例如，令X为$\mathbb{R}^2$内的一个实心正方形，我们有(D_4, m)在X上自然的右作用

$$r: X \times D_4 \to X$$
$$(x, T) \mapsto T(x)$$

这里，右作用满足结合率是指，对于$\forall T_1, T_2 \in D_4, x \in X$，都有

$$r(x, m(T_1, T_2)) = r(r(x, T_1), T_2)$$

练习：利用m与r的定义方式，验证上面的等式。

作用的例子4

令M为集合$\{1,2,3,4\}$，回忆我们之前引入的记号$S_4 = (Aut_{\mathbf{Set}}(M), m)$。
存在一个自然的右作用

$$r: M \times S_4 \to M$$
$$(i, f) \mapsto f(i)$$

例如

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, i = 3, \text{则 } r(3, f) = f(3) = 4$$

这里，右作用满足结合率是指，对于$\forall T_1, T_2 \in S_4, i \in X$，都有

$$r(i, m(T_1, T_2)) = r(r(i, T_1), T_2)$$

练习：验证上述作用满足右结合率。

作用的例子5

考虑$\mathbb{R}^*$在$\mathbb{R}^2$上的如下作用

$$T: \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\left(c, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) \mapsto \begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{bmatrix}$$

练习：验证T既是左作用，又是右作用。

作用的轨道

考虑一个左作用$l: G\times M \to M$。

给出一点$x \in M$。

x在G的左作用l下的轨道是指M的子集

$$Gx = \{g \cdot x \mid g \in G\}$$

常用的符号除了Gx外，还有$O(x)$。（O代表orbit）

把G看成某些操作构成的集合， Gx即为x在这些不同的操作下可以达到的位置的集合。

作用的轨道

理解以下作用的轨道。

1. 作用的例子5。
2. $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \big(t,(x_1,x_2)\big) \mapsto (x_1, t + x_2)$
3. $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \left(\theta, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$
4. 作用的例子4。

作业

1. 12月5日的阅读资料中，影印版抽象代数教材19页：2，3，6，7。阅读影音教材的定义1.2,1.3，命题1.4,1.5，以及16-18页的所有例子。
2. 考虑左作用$\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: $\left(t,\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) \mapsto \begin{bmatrix} tx_1 \\ t^{-1}x_2 \end{bmatrix}$，描述所有的轨道。
3. 考虑左作用 $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: $\left(t,\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) \mapsto \begin{bmatrix} t^2x_1 \\ t^3x_2 \end{bmatrix}$，描述所有的轨道。